Osaka University Knowledge Archive

Title	Group ring ノ表現トソノ commutator algebra
Author(s)	小暮, 勝美
Citation	全国紙上数学談話会. 229 p.666-p.673
Issue Date	1941-12-28
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74923
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

993. Group ring ノ表現トソノ commutator algebra

小 [illegible] 勝 美 (東大)

此ノ談話ハ小平(邦)サンニ教ヘテ戴イタコトヲ少シ許リ整理シタモノデス。尚文理大ノ河田サンカラモ別ニ同ジ様ナ考ヘヲオ聞キシマシタ。

1. Weyl ノ Classical groups ノ第三章 B デハ full linear group ト symmetric group トノ關係ノ問題ヲ擴張シテ，一般有限群ノ group ring トソノ一ツノ表現ノ commutator algebra トノ關係ヲ論ジテヰル。ソノ main theorem ハ次ノ通リデアッタ。

有限群 γ ノ group ring ヲ P (K ヲ係數トスル)，ソノ non-degenerate ナ表現ヲ Γ，ソノ表現加群ヲ $\mathfrak{P}$，γ ノ commutator algebra —— 即チ γ ヲ作用團トシタトキノ $\mathfrak{P}$ ノ同型環ヲ $\mathfrak{A}$ トスルト，P ノアル ideal P_0 ニ含マレル左 ideal σ ト，$\mathfrak{P}$ ノ $\mathfrak{A}$-invariant subspace Σ トノ間ニ次ノ如キ一對一ノ對應ガ存在スル，即チ

$$\left.\begin{aligned} &\sigma \longrightarrow \sharp\sigma = (f;\ f_i(\cdot) \in \sigma) \\ &\Sigma \longrightarrow \natural\Sigma = \Big(\sum_{i,\alpha} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot);\ f^{(\alpha)} \text{ハ } \Sigma \text{ ノ basis}\Big) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

トスルト $\natural\sharp\sigma = \sigma$，$\sharp\natural\Sigma = \Sigma$ トナリ，ソノ上

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$$

$$\sigma_1\supset\sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_1\supset\Sigma_2$$

$$\sigma_1\cong\sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_1\cong\Sigma_2$$

ガ成立スル．コヽニ $\sigma\leftrightarrow\Sigma$, $\sigma_i\leftrightarrow\Sigma_i$ トスル．尚ホ $P_0=qP$ デアル．

Weyl ノ証明ハ難シイコトヲ使フワケデハナイガ，餘リ解リヨクナイ。ソレハ(1)ノ對應ガ面倒ナタメデアルガ，コノ對應ハ *Weyl* ノ証明ノ途中ニモ注意サレ，且ツ利用サレテヰルヤウニ，モット分リヨイ形ニ直スコトガ出来ル．($\hat{e}$ ガ σ ノ *generating idempotent* ナルトキ，$\sigma=eP$ トナルコトニ注目スルノデアル）ソノ新シイ對應ノサセ方ニヨレバ，上ノ定理ハ簡單ニ証明サレル．ソシテ実際ニコノ定理ヲ，應用スルニ當ッテハ，ソノ形デ差支ヘナイト思ハレル。尚新シイ對應ノサセ方ガ(1)ト一致スルコトモ比較的容易ニ証明サレル。

2. 完全可約デ1ヲ持ツ *matric algebra* ノ *commutator algebra* ハ矢張リ完全可約デ，ソノ又 *commutator algebra* ハモトノ *algebra* ト一致スル。

此ノ定理ハ *Weyl* ノ本デハ P.95 ニ出テヰルカラ，之レヲ使ウ（*Weyl* ノ方法デハ之ヲ使ッテヰナイコトハ注目ニ價スル）．*group ring* P ハ完全可約ダカラ，ソノ *non-degenerate* ナ表現 γ ハ完全可約デアル．勿論1ヲ持ツ．故ニ上ノ定理デソノ *commutator algebra* $\mathfrak{a}$ ハ完全可約デ1ヲ持チ、ソノ又 *commu-*

tator algebra ハモトノ γ ニ一致スル. 即チ γ ハ $\mathfrak{a}$ ヲ operator トシタトキノ P ノ linear transformation ノナス ring デアル. ソコニ注目シテ次ノ一般的ナ定理ヲ証明スル。

定理1. $\mathfrak{a}$-K加群 $\mathfrak{M}$ が完全可約($\mathfrak{a}$ ヲノ), $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{a}$-automorphism ノ ring ヲ γ トスルト γ ノ右 ideal $\mathfrak{r}$ ト $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{a}$-subspace $\mathfrak{m}$ トノ間ニハ次ノ對應デ一對一ノ關係が成立スル。

$$\mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{r}\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{r} = (a;\ a\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{m}) \longleftarrow \mathfrak{m}$$

ソシテ $\mathfrak{r} \longleftrightarrow \mathfrak{m}$, $\mathfrak{r}_i \longleftrightarrow \mathfrak{m}_i$ トスルト

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 \longleftrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$$

$$\mathfrak{r}_1 \supseteq \mathfrak{r}_2 \longleftrightarrow \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_2$$

$$\mathfrak{r}_1 \cong \mathfrak{r}_2 \longleftrightarrow \mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$$

(Fitting: Dissertation Satz 8 又ハ Math. Ann. 107 參照)

コノ定理ハ見掛ケ上次ノ様ニ一般ナ形ニナルが, ソノ方が証明ニ便利デアル。

定理1a. 二ツノ完全可約ナ γ-K加群(γ ヲノ) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ がアル. $\mathfrak{M}$ ノ γ-automorphism 全体ヲ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$ ノ γ-automorphism ノ全体ヲ $\mathfrak{b}$ トスルト, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ハ夫々 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ヲ operator トシタ場合 parallel ナ構造ヲ持ツ. 即チ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ノ invariant subspace ヲ夫々 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ トスルトキ

$$\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{n} = \mathfrak{r}\mathfrak{N} \qquad \mathfrak{r} = (a\,;\, a\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{m}) \tag{2}$$

$$\mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{r}'\mathfrak{M} \qquad \mathfrak{r}' = (a\,;\, a\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{n}) \tag{3}$$

デ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ハ一對一ニナリ，且ツ直和ハ直和ニ isomorphic ナモノハ isomorphic ナモノヘト對應スル。

（證明）先ヅ一對一ナルコト．$\mathfrak{M}$ ハ完全可約ダカラ $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}'$ ナル $\mathfrak{m}'$ ガアル．コノ直分解デ $\mathfrak{M} \ni m = m_1 + m'$ トスルト，projection：$m \longrightarrow m_1$ ハ明カニ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{o}$-automorphism デアル．之ヲ e トカケバ $m_1 = em$，$e \in \mathfrak{r}$ デアル．スルトコノ e ヲ使ッテ(2)ハ

$$\mathfrak{m} = e\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{n} = e\mathfrak{N} \tag{2'}$$

トカケル．（ソレニハ $e\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ ヲ示セバヨイ：$e\mathfrak{r}\mathfrak{M} = e\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$，又 $a\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{m}$ ナラドンナ $m \in \mathfrak{M}$ ニ對シテモ $am \in \mathfrak{m}$ $\quad\therefore\ eam = am \quad$ i.e. $ea = a$，$\therefore\ a \in e\mathfrak{r}$）

ソシテ(2′)ニ於テ e ハ $\mathfrak{N} \to e\mathfrak{N}$ ナル一ツノ projection デアル（$\mathfrak{N} = e\mathfrak{N} + (1-e)\mathfrak{N}$）．故ニ(2),(3)ガ symmetric ナルコトニ注意スレバ，我々ノ對應ガ一對一ナル事ガワカル。

定理ノ後半．假定ガ symmetric ダカラ，何レカ一方ノ方向ダケヲ証明スレバヨイ．$\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{n}$，$\mathfrak{m}_i \longrightarrow \mathfrak{n}_i$ トシヨウ。

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ ナラ projection ヲ用ヰテ

$e\mathfrak{M} = e_1\mathfrak{M} + e_2\mathfrak{N}$，$e = e_1 + e_2$，$e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ トカケル．$\therefore\ e\mathfrak{N} = e_1\mathfrak{N} + e_2\mathfrak{N} \quad \therefore\ \mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$

完全可約ダカラ $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2 \longrightarrow \mathfrak{n}_1 \cong \mathfrak{n}_2$ ハ上カラ明カ.

最後ニ $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$ ナラ $\mathfrak{m}_1 = e\mathfrak{M}$ トスルトキ $\mathfrak{m} \to e\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$, トシ又 $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$ デ $\mathfrak{m}_1 \longrightarrow \mathfrak{m}_2$ トスルト, コノ二ツヲ組合セタ $\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}_2$ ハ明カニ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{o}$-automorphism デアル. 之ヲ a トシヨウ. $a \in \mathfrak{r}$. スルト $a\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ 即チ $ae\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_2$. 之レカラ對應スル $\mathfrak{N}$ ノ subspace ニ移レバ $ae\mathfrak{N} = \mathfrak{n}_2$. 然ルニ $e\mathfrak{N} = \mathfrak{n}_1$ $\therefore\ a\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2$ 故ニ $\mathfrak{n}_1 \cong \mathfrak{n}_2$ q.e.d.

定理1a デ $\mathfrak{N}$ トシテ $\mathfrak{r}$ ヲ考ヘルコトが出來ル. $\mathfrak{r}$ ヲ左カラノ operator ト考ヘタトキ, ソレト commutative ナ linear transformation ノ全体ハ則チ右カラノ operator ト考ヘタ $\mathfrak{r}$ 自身ニ外ナラナイ. 故ニ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$-subspace ニ相當スルモノハ $\mathfrak{r}$ ノ右 ideal デアル. 故ニ定理1が證明サレタコトヽナル。

實ハ定理1ト1aトハ殆ンド同ジコトデアル. 実際定理1カラ容易ニ1aヲ出スコトが出來ルコトハ明デアル。

扨テ定理1ヲ我々ノ場合ニ應用スレバ, ρ ノ表現ナル $\mathfrak{r}$ ノ右 ideal ト P ノ $\mathfrak{o}$-subspace Σ トノ間ノ parallelism がワカッタコトヽナル. $\rho \longrightarrow \mathfrak{r}$ ニ於テ $\rho^0 \longrightarrow (0)$ トスルト ρ^0 ハ ρ ノ ideal, ρ ハ完全可約ダカラ, $\rho = \hat{\rho}_0 + \rho^0$ ナル ideal $\hat{\rho}_0$ がキマル. ($\wedge$ ハ ρ ノ元 $\sum a(S)S$ ヲ $\sum a(S)S^{-1}$ ヘ移ス inverse automorphism トスル. ワザワザ $\hat{\rho}_0$ トシタノハ結果ヲ奇麗ニスルタメ——又 Weyl ノ記号ト合セルタメデアル)

ソシテ $\hat{P}_0 \cong \mathfrak{r}$, コノ $\cong$ ハ $\hat{P}_0$ ヲ $a \to \mathfrak{T}(a) \in \mathfrak{r}$ デ與ヘラレル. ソコデ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. $\hat{P}_0$ ノ右 ideal $\hat{\sigma}$ ト P ノ $\mathfrak{O}$-subspace Σ トノ間ニハ

$$\hat{\sigma} \longrightarrow \Sigma = \hat{\sigma} P$$

ニヨッテ定理1ノ型ノ1-1對應ガ成立スル。

尚、$\hat{P}_0 \longleftrightarrow P$, $(0) \longleftrightarrow (0)$ ヨリ

系1. $P = \hat{P}_0 P$ (4)

系2. $(0) = (a;\ aP = (0))$ (5)

Roof operation デ $\hat{P}_0$ ノ右 ideal $\hat{\sigma}$ ハ P_0 ノ左 ideal σ ニ一對一ニ移ルカラ

定理2a. P_0 ノ左 ideal σ ト P ノ $\mathfrak{O}$-subspace Σ トノ間ニハ

$$\sigma \longrightarrow \Sigma = \hat{\sigma} P \tag{6}$$

デ定理1ノ型ノ1-1對應ガ成立スル。

此ノ定理2aヲ基本定理トシテ Weyl ノ本ノ第四章ノ問題ヲ論ズルコトガ出來ルシ, 又 symmetric group ノ character ト full linear group ノ character ノ一方カラ他ノ一方ヲ導キ出ス問題等ヲ論ズルコトガ出來ル。

3. 最後ニ定理2aノ P_0 ガ Weyl ノ方法デノ P_0 ト一致シ, σ ト Σ トノ對應ノサセ方ハ両者同一ナルコトヲ証明シヨウ。ソノタメニハ Weyl ノ本ノ P.106 ノ Lemma ヲ使フガ, ソノ中デモ簡單ナ A, B グラヰヲ用ヰレバ十分

デアル。

証明スベキコトハ

(i) 定理 2a ノ ρ_0 ガ Weyl ノ $\text{タ}P$ ト一致スルコト: $\rho_0 = \text{タ}P$.

(ii) 定理 2a ノ意味デ $\sigma \to \Sigma$ トスルト $\Sigma = \#\sigma$.

(iii) 定理 2a ノ意味デ $\Sigma \to \sigma$ トスルト $\sigma = \text{タ}\Sigma$

ノ三ツデアル。

(ii) ヲ先ヅ証明スル。コノトキ σ ハ ρ ノ勝手ナ左 ideal トシテ証明スレバ十分デアル。$\Sigma \subseteq \#\sigma$: $g \in \Sigma$ トスルト $g = af$, $a \in \hat{\sigma}$ $\therefore$ $g(\cdot) = f(\cdot)\hat{a}$, $\hat{a} \in \sigma$, (Lemma B). σ ハ左 ideal ナル故 $g(\cdot) \in \sigma$ 即チ $g \in \#\sigma$ デアル。

逆ニ $\#\sigma \subseteq \Sigma$ ノ方: $f \in \#\sigma$ トスルト $f(\cdot) \in \sigma$, σ ノ idempotent ヲ $\hat{e}$ (i.e. $\sigma = \rho\hat{e}$) トスルト $f(\cdot) = f(\cdot)\hat{e}$, Lemma B デ $f = ef$, $e \in \hat{\sigma}$ $\therefore$ $f \in \Sigma$

(i) ノ証明. (4) ニヨリ $P = \hat{\rho}_0 P$ $\therefore$ $f \in P$ ナラ $f = \hat{a}g$, $a \in \rho_0$. 故ニ Lemma B デ $f(\cdot) = g(\cdot)a \in \rho_0$. $\therefore$ $\text{タ}P \leq \rho_0$. $\text{タ}P$ ハ左 ideal デアル (Lemma A) $\text{タ}P = \sigma'$ トカカウ. ρ_0 ハ完全可約ダカラ $\rho_0 = \sigma' + \sigma''$ $\therefore$ $\hat{\rho}_0 P = (\hat{\sigma}' + \hat{\sigma}'')P = \hat{\sigma}'P + \hat{\sigma}''P$.

(ii) ニヨリ $\hat{\sigma}'P = \#\sigma' = \#\text{タ}P \geq P$ $\therefore$ $\hat{\sigma}'P = P$

故ニ当然 $\hat{\rho}_0 P = P$ デ従ッテ $\hat{\sigma}''P = (0)$ トナル。(5) ニヨリ $\hat{\sigma}'' = (0)$, $\sigma'' = 0$ 故ニ $\rho_0 = \sigma' = \text{タ}P$ ヲ得ル。

(iii) ノ証明. Σ ハ定理 2a デ $\hat{\sigma}P$ トカケルノデアルカラ, $\natural\hat{\sigma}P = \sigma$ ヲ証明スレバヨイ。

$\natural\hat{\sigma}P \leq \sigma$ ノ方: $a \in \natural\hat{\sigma}P$ ナラ $a = \sum_{i,\alpha} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)$,

$f^{(\alpha)}$ ハ $\hat{\sigma}P$ ノ *basis*. 故ニ $\hat{\sigma}$ ノ *idempotent* ヲ e トスレバ $f^{(\alpha)} = ef^{(\alpha)}$ ダカラ

$$a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} (ef^{(\alpha)})_i(\cdot) = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)\,\hat{e}$$

(*lemma* B)

然ルニ $\hat{e}$ ハ σ ノ *idempotent* ダカラ $\in \sigma$

次ニ $\sigma \leq \natural\hat{\sigma}P$ ヲ示ス. $a \in \sigma$ トシヨウ. (i) ニヨリ $\sigma \leq \natural P$, 故ニトニカク $a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)$ トカケル.

σ ノ *idempotent* ヲ $\hat{e}$ トスレバ

$$a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)\,\hat{e} = \sum \varphi_i^{(\alpha)} (ef^{(\alpha)})_i(\cdot)$$

(*lemma* B)

e ハ $\hat{\sigma}$ ノ *idempotent generator* ダカラ

$ef^{(\alpha)} \in \hat{\sigma}P$, $\therefore\ a \in \natural\hat{\sigma}P$.

q. e. d.

—— 終リ ——